Ein Fahrzeug mit quadratischen Rädern

—

Ist das möglich?

André Mössner
www.macfunktion.ch

29. Oktober 2007

Kann ein Fahrzeug mit quadratischen Rädern überhaupt fahren?

Die Antwort lautet 'ja'.
Allerdings nur, falls die Strassenoberfläche die dazu geeignete Form hat. Damit das Fahrzeug ohne zu Holpern fahren kann, muss die Strassenoberfläche in Fahrtrichtung wellenförmig verlaufen. Die 'Wellen'-Stücke haben die Form einer Kettenlinie.

Die Gleichung eines dieser Wellenstücke wird nachfolgend hergeleitet werden.

Eine von mir programmierte Animation der Fahr-Bewegung finden Sie auf
www.kst.ch/mathematik/quadradanimation/quadradAnimation.html
Dieser Artikel selbst ist zu finden auf *www.kst.ch/mathematik/quadrad.html*
Dort findet sich auch eine weitere Berechnung von mir, welche zeigt, dass die Fahrt in horizontaler Richtung erheblich rütteln würde.

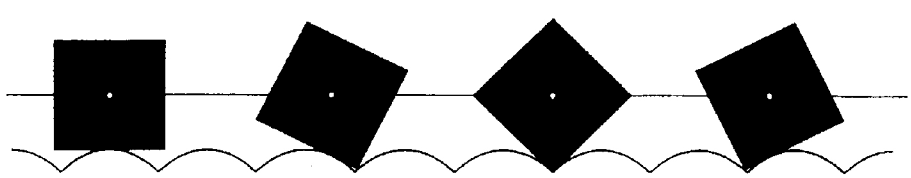
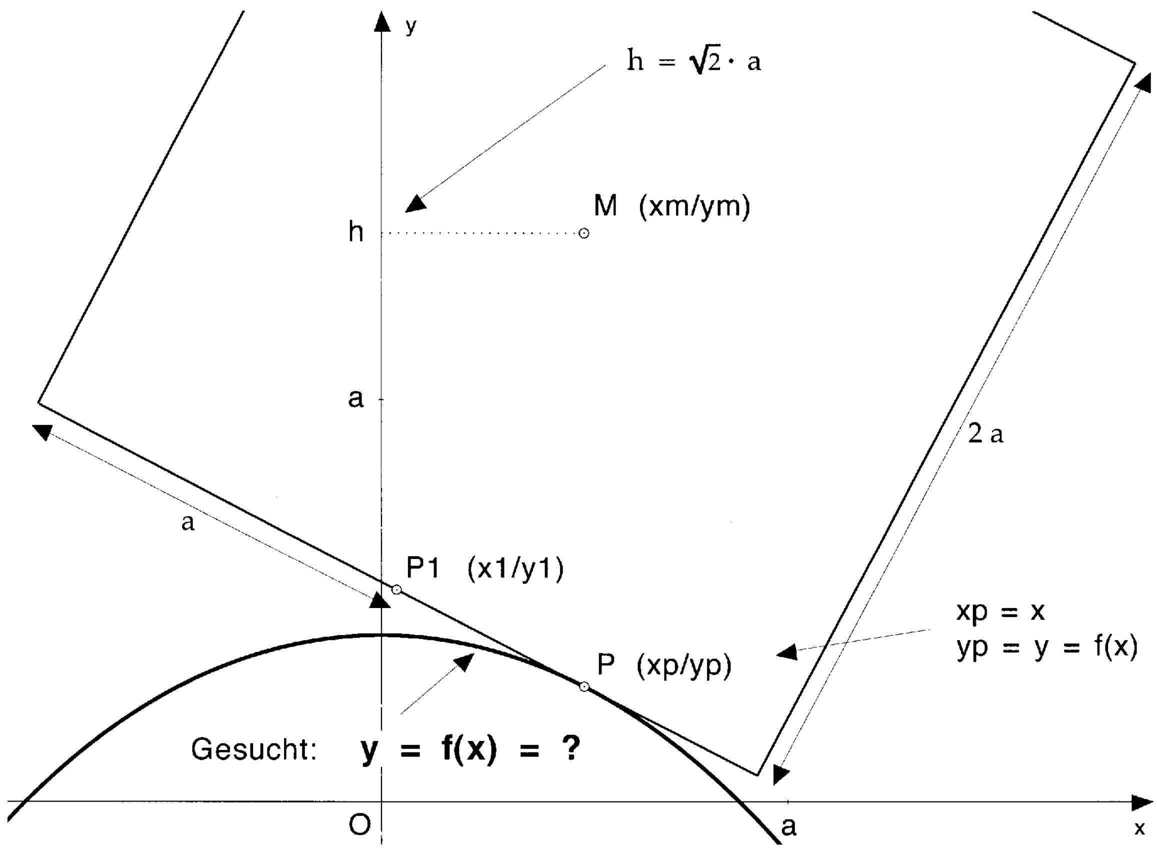


Illustration von Reinhart Behr (1928 - 2003)
www.reinhart-behr.de

1 Notationen

- $P = P(x_P/y_P)$ sei der Berührungspunkt des Rades mit der Strasse bzw. mit der gesuchten Kurve.
- $P_1 = P_1(x_1/y_1)$ sei der Mittelpunkt der entsprechenden Quadratseite des Rades.
- $M = M(x_m/y_m)$ sei der Mittelpunkt des quadratischen Rades.
- Die übrigen Bezeichnungen können der untenstehenden Figur entnommen werden.



2 Idee für die Herleitung der Kurvengleichung

- $y = f(x)$ bzw. $y_P = f(x_P)$ ist die gesuchte Funktionsgleichung bzw. die Beziehung zwischen den Koordinaten x_P und y_P des Berührungspunktes P.
- Daraus lassen sich die Koordinaten von M berechnen.
- Die Forderung, dass die y-Koordinate von M immer gleich gross ist (unabhängig vom gewählten Kurvenpunkt P), ergibt die Differenzialgleichung $y' = 0$.
  Deren Lösung ist die Gleichung der gesuchten Funktion f .

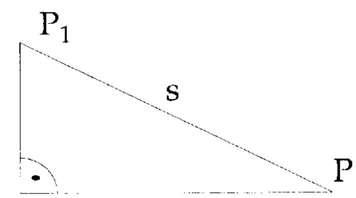
3 Quadratmittelpunkt M

Die Koordinaten von M ergeben sich aus seinem Ortsvektor

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1M} \tag{1}$$

Der Einfachheit verwenden wir im Folgenden die Abkürzungen $x = x_P$ und $y = y_P$.

3.1 Berechnung des Vektors $\vec{PP_1}$



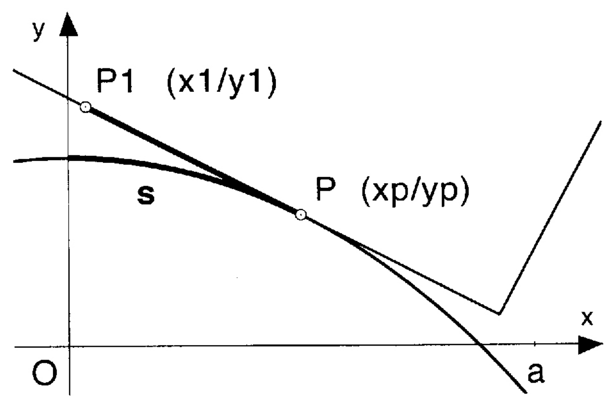
Die Steigung der entsprechenden Strecke ist gleich

$$f'(x_P) = f'(x) = y'$$

Liegt P (wie in unseren Abbildungen) *rechts* von P_1, so ist diese Steigung negativ: $y' < 0$.
Der Vektor $\overrightarrow{PP_1}$ hat deshalb die gleiche Richtung und Orientierung wie folgender Vektor $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -y' \end{bmatrix} \tag{2}$$

Um den Vektor $\overrightarrow{PP_1}$ zu berechnen, dividieren wir $\vec{v}$ durch seine Länge und multiplizieren das Ergebnis mit der Länge s, welche der Vektor haben muss:



- **Länge des Vektors $\vec{v}$:**

  $$|\vec{v}| = \sqrt{1 + [y']^2}$$

- **Länge $\left|\overrightarrow{PP_1}\right| = s$:**
  Wegen der Abrollung ist
  $s =$ Länge des Bogens des Graphen
  von $x = 0$ bis $x = x_P$:

$$s = \int_0^{x_P} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

Mit diesen Vorüberlegungen und der Abkürzung s erhalten wir den gesuchten Vektor

$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{-s}{\sqrt{1 + [y']^2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y' \end{bmatrix} \tag{4}$$

Anmerkung:
Dies ist auch richtig im Fall, wo P *links* von P_1 liegt.
Dann ist nämlich $y' > 0$ und obiges Integral (3) ist $s < 0$ (weil $x_P < 0$).

3.2 Berechnung des Vektors $\vec{P_1M}$

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{P_1M}$
Dieser Vektor steht rechtwinklig zu $\vec{v}$ und hat die Länge a :

$$\overrightarrow{P_1M} = \frac{a}{\sqrt{1+[y']^2}} \cdot \begin{bmatrix} -y' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

3.3 Koordinaten des Mittelpunktes M

Für den Mittelpunkt M ergibt sich aus den Beziehungen (1), (4) und (5)

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{-s}{\sqrt{1+[y']^2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ y' \end{bmatrix} + \frac{a}{\sqrt{1+[y']^2}} \cdot \begin{bmatrix} -y' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

4 Herleitung der Differenzialgleichung

Wenn das Fahrzeug nicht "holpern" soll, muss sich die Radachse immer auf der gleichen Höhe h befinden: $y_m = h =$ konstant
Diese Bedingung werden wir so verwenden, dass die Ableitung von y_m gleich Null ist.

y_m erhalten wir aus der Gleichung (6):

$$y_m = y - \frac{s \cdot y'}{\sqrt{1+[y']^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+[y']^2}} = h \tag{7}$$

Daraus ergibt sich

$$y - h = \frac{s \cdot y' - a}{\sqrt{1+[y']^2}} \tag{8}$$

Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$(y-h) \cdot \sqrt{1+[y']^2} = s \cdot y' - a \tag{9}$$

bzw.

$$(y-h) \cdot \sqrt{1+[y']^2} - s \cdot y' + a = 0 \tag{10}$$

Diese Gleichung werden wir ableiten. Dabei gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

- Falls $y' = 0$ ist, lautet (10): $(y-h) + a = 0$
  In diesem Fall ist die Ableitung von (10): $y' - 0 + 0 = 0$
  bzw. wegen $y' = 0$: $0 = 0$
  Dieser Fall ist uninteressant. Im Fall $y' = 0$ ist $y = h - a$, wie wir sowieso wissen (vgl. Figur auf Seite 2).
- Wir werden deshalb nur den Fall weiterverfolgen, wo $y' \neq 0$ ist.

Beim Ableiten von (10) nach x (beachte, dass $x = x_P$!) müssten wir unter anderem beim Summanden $s \cdot y'$ die Produktregel anwenden. Um die daraus resultierenden komplizierten Terme zu vermeiden, dividieren wir die Gleichung (10) zuerst durch y'; nach den vorherigen Überlegungen dürfen wir von der Bedingung $y' \neq 0$ ausgehen.
Die folgende Gleichung (12) ist in diesem Fall äquivalent zu (10)

$$(y-h) \cdot \frac{\sqrt{1+[y']^2}}{y'} - s + \frac{a}{y'} = 0 \tag{11}$$

bzw. vereinfacht

$$(y-h) \cdot \sqrt{\frac{1}{[y']^2}+1} - s + \frac{a}{y'} = 0 \tag{12}$$

4.1 Vorbereitungen für die Ableitung von (12)

- $x = x_P$ ist die obere Grenze des Integrals (3) von s. Deshalb "verschwindet" beim Ableiten (nach x) das Integral:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+[y'(x)]^2} = \sqrt{1+[y']^2} \tag{13}$$

- Weil $h = y_m$ eine Konstante ist, gilt $h' = y'_m = 0$.
- **Ableitung des Wurzelterms von (12):**

$$\left(\sqrt{\frac{1}{[y']^2}+1}\right)' = \left(\sqrt{[y']^{-2}+1}\right)' = \frac{-2 \cdot [y']^{-3} \cdot y''}{2 \cdot \sqrt{[y']^{-2}+1}} \tag{14}$$

4.2 Gesuchte Differenzialgleichung

Wir verwenden die Vorbereitungen (13) und (14), um die Gleichung (12) abzuleiten:

$$y' \cdot \sqrt{\frac{1}{[y']^2}+1} + (y-h) \cdot \frac{-[y']^{-3} \cdot y''}{\sqrt{[y']^{-2}+1}} - \sqrt{1+[y']^2} - \frac{a \cdot y''}{[y']^2} = 0 \tag{15}$$

Vereinfacht ergibt das Schritt für Schritt

$$\sqrt{1+[y']^2} + (y-h) \cdot \frac{-[y']^{-3} \cdot y''}{\sqrt{[y']^{-2}+1}} - \sqrt{1+[y']^2} - \frac{a \cdot y''}{[y']^2} = 0 \tag{16}$$

$$(y-h) \cdot \frac{-y''}{[y']^3 \cdot \sqrt{[y']^{-2}+1}} - \frac{a \cdot y''}{[y']^2} = 0 \tag{17}$$

$$y'' \cdot \left((h-y) \cdot \frac{1}{[y']^2 \cdot \sqrt{1+[y']^2}} - \frac{a}{[y']^2} \right) = 0 \tag{18}$$

Die gesuchte Kurve (= Strassenoberfläche) ist nirgends gerade. Deshalb ist ihre Krümmung überall $\neq 0$. Daraus folgt, dass $y'' \neq 0$ ist; wir können (18) durch y'' dividieren. Gleichzeitig multiplizieren wir noch mit dem Hauptnenner:

$$(h-y) = a \cdot \sqrt{1+[y']^2} \tag{19}$$

Die **Differenzialgleichung unserer gesuchten Funktion** lautet

$$\boxed{\frac{h-y}{a} = \sqrt{1+[y']^2}} \tag{20}$$

5 Lösen der Differenzialgleichung

Quadriert lautet die Gleichung (20)

$$\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 = 1+[y']^2 \tag{21}$$

Nach y' aufgelöst

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1} \tag{22}$$

Separieren der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}} = \mathrm{d}x \tag{23}$$

5.1 Substitution

Um die linke Seite von (23) integrieren zu können, machen wir eine Substitution (Trick):

$$\cosh(t) := \frac{h-y}{a} \qquad \rightarrow \qquad y = h - a \cdot \cosh(t) \tag{24}$$

$$\rightarrow \qquad \mathrm{d}y = -a \cdot \sinh(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{25}$$

5.2 Substitution bei (23) einsetzen

$$\frac{-a \cdot \sinh(t) \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{\cosh^2(t) - 1}} = \mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{-a \cdot \sinh(t) \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{\sinh^2(t)}} = \mathrm{d}x \tag{26}$$

Kürzen mit $\sinh(t)$ ergibt $-a \cdot \mathrm{d}t = \pm \mathrm{d}x$

Einfache Umformungen ergeben Schritt um Schritt

- $\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}x$
- $\int \mathrm{d}t = \pm \int \frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}x$
- $t = \pm\frac{x}{a} + C$
- $\cosh(t) = \cosh\left(\pm\frac{x}{a} + C\right)$

Substitution rückgängig machen (vgl. (24)): $\quad \frac{h-y}{a} = \cosh\left(\pm\frac{x}{a} + C\right)$

Nach y auflösen

$$y = h - a \cdot \cosh\left(\pm\frac{x}{a} + C\right) \tag{27}$$

5.3 Berechnung der Integrationskonstanten C

Für die auf Seite 2 dargestellte Situation ist für $x = 0$

$$f(0) = y = h - a \tag{28}$$

Deshalb muss für $x = 0$ gelten ((28) in (27) eingesetzt und vereinfacht):

$$1 = \cosh(0 + C) \qquad \rightarrow \qquad C = 0 \tag{29}$$

(29) in (27) eingesetzt ergibt $\quad y = h - a \cdot \cosh\left(\pm\frac{x}{a}\right)$

Weil der Cosinushyperbolicus eine *gerade* Funktion ist, erhält man $y = h - a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

5.4 Lösung der Diff'gleichung bzw. Gleichung der "Strasse"

Wir verwenden, dass $h = \sqrt{2} \cdot a$ ist (vgl. Figur auf Seite 2) und erhalten:

Ein Bogen der Strasse hat die Gleichung $\quad \boxed{y = a \cdot \left(\sqrt{2} - \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)}$